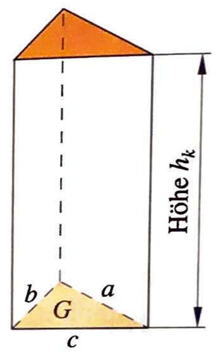
Verstehen

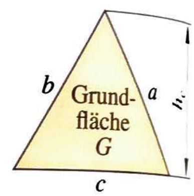
Der Süßwarenhersteller ist sich nicht sicher, ob die Schokolinsen in der von Herrn Meyer vorgeschlagenen Verpackung Platz finden. Es wird ein Volumen von mindestens $100\,\text{cm}^3$ benötigt. Daher erfragt er bei ihm das Volumen der Verpackung.

Herr Meyer macht zwei Vorschläge für die Form der Verpackung. Verpackung 1 ist ein dreiseitiges Prisma, Verpackung 2 ist ein trapezförmiges Prisma. Sind die beiden Verpackungen groß genug?

Merke Das **Volumen** V eines Prismas bestimmt man, indem man den Flächeninhalt der Grundfläche G mit der Körperhöhe h_k des Prismas multipliziert.
Es gilt also:
$\boldsymbol{V = G \cdot h_k}$

Kurz gesagt:
Volumen eines Prismas = Grundfläche mal Höhe





Beispiel 1

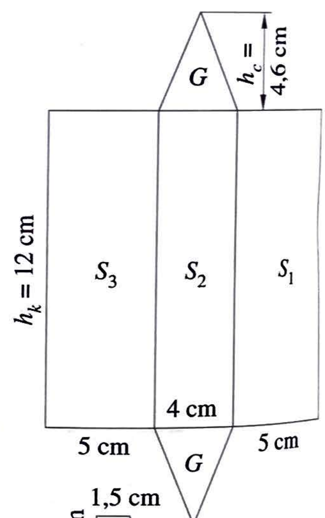
Herr Meyers dreiseitiges Prisma hat folgende Maße:
$a = 5\,\text{cm}$; $b = 5\,\text{cm}$; $c = 4\,\text{cm}$; $h_c = 4{,}6\,\text{cm}$; $h_k = 12\,\text{cm}$
Berechnung der Grundfläche (Dreieck):

$$G = \frac{c \cdot h_c}{2}$$
$$= \frac{4\,\text{cm} \cdot 4{,}6\,\text{cm}}{2} = 9{,}2\,\text{cm}^2$$

Berechnung des Volumens:

$$V = G \cdot h_k$$
$$= 9{,}2\,\text{cm}^2 \cdot 12\,\text{cm} = 110{,}4\,\text{cm}^3$$

Die vorgeschlagene Verpackung hat ein Volumen von $110{,}4\,\text{cm}^3$.



Beispiel 2

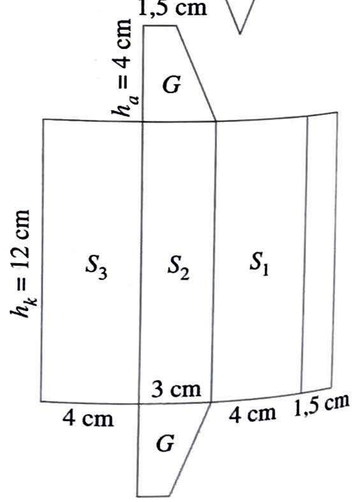
Der trapezförmige Vorschlag hat folgende Maße:
$a = 3\,\text{cm}$; $c = 1{,}5\,\text{cm}$; $h_a = 4\,\text{cm}$; $h_k = 12\,\text{cm}$
Berechnung der Grundfläche (Trapez):

$$G = \frac{(a + c)}{2} \cdot h_a$$
$$= \frac{(3\,\text{cm} + 1{,}5\,\text{cm})}{2} \cdot 4\,\text{cm}$$
$$= 2{,}25\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$$

Berechnung des Volumens:

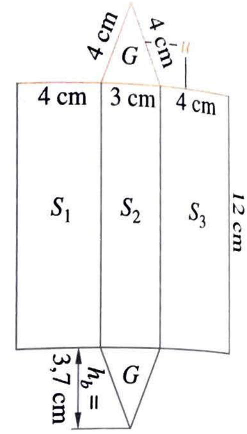
$$V = G \cdot h_k$$
$$= 9\,\text{cm}^2 \cdot 12\,\text{cm} = 108\,\text{cm}^3$$

Die vorgeschlagene Verpackung hat ein Volumen von $108\,\text{cm}^3$. Beide Verpackungen sind groß genug.
Der Süßwarenhersteller entscheidet sich für Verpackung 2.



Verstehen

Herr Meyer ist Designer. Für einen Süßwarenhersteller soll er sich eine originelle Verpackung für Schokolinsen einfallen lassen. Er hat sich für ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche entschieden.
Der Süßwarenhersteller möchte aus Kostengründen wissen, wie viel Pappe für die reine Oberfläche der Verpackung mindestens benötigt wird. Dazu zeichnet Herr Meyer das Netz der Verpackung.



Alle Seitenflächen eines Prismas zusammen bilden ein Rechteck, dessen Flächeninhalt wir als Mantelfläche *M* bezeichnen

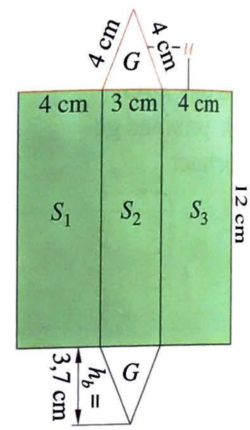
HINWEIS
Sind Flächen zueinander kongruent, so besitzen sie die gleiche Größe. Dann reicht es aus, eine Flächengröße zu berechnen und mit der Anzahl der kongruenten Flächen zu multiplizieren.

BEISPIEL 1

Gesucht ist die Mantelfläche der Verpackung.

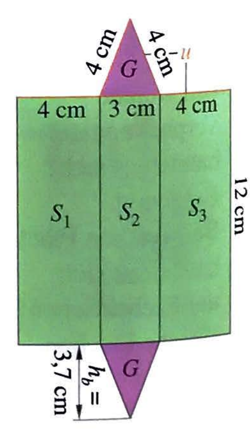
1. Möglichkeit:
Teilflächenberechnung:
$S_1 = 4\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 48\,\text{cm}^2$
$S_2 = 3\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
$S_3 = S_1 = 48\,\text{cm}^2$
Mantelfläche:
$M = S_1 + S_2 + S_3$
$M = 2 \cdot 48\,\text{cm}^2 + 36\,\text{cm}^2$
$M = 132\,\text{cm}^2$

2. Möglichkeit:
Umfang der Grundfläche:
$u = a + b + c$
$u = 4\,\text{cm} + 3\,\text{cm} + 4\,\text{cm}$
$u = 11\,\text{cm}$
Mantelfläche:
$M = u \cdot h_k$
$M = 11\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}$
$M = 132\,\text{cm}^2$



Merke Der **Mantelflächeninhalt *M*** eines Prismas lässt sich nach folgender Formel berechnen: $M = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$
Es gilt demnach auch: $\boldsymbol{M = u \cdot h_k}$

Für die Berechnung des Oberflächeninhalts des Prismas muss man zum Mantelflächeninhalt noch den Flächeninhalt der Grund- und der Deckfläche hinzurechnen.



Beispiel 2

Gesucht ist der Oberflächeninhalt der Verpackung oben.

Flächeninhalt der Grundfläche: $G = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3\,\text{cm} \cdot 3{,}7\,\text{cm}}{2} = 5{,}55\,\text{cm}^2$

Oberflächeninhalt des Prismas: $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 5{,}55\,\text{cm}^2 + 132\,\text{cm}^2 = 143{,}1\,\text{cm}^2$

Für die Verpackung werden $143{,}1\,\text{cm}^2$ Pappe (plus Klebelaschen) benötigt.

Merke Die Oberfläche eines Prismas besteht aus dem Mantel sowie der Grund- und der Deckfläche. Der **Oberflächeninhalt *O*** berechnet sich deshalb so:
$O = 2G + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ bzw. $O = 2G + M$